

Tentamen van Wiskunde 2, 29 augustus 2002, 14:00-17:00 uur

Schrijf je naam + student nummer op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht.

Opgave 1: Gegeven zijn de matrix en vector $A = \begin{pmatrix} 2 & p & 0 \\ 1 & p & 2 \\ -1 & 0 & p \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Voor welke waarden van p is A singulier?
- Hoeveel oplossing heeft $Ax = b$ voor elke waarde van $p \in \mathbb{R}$?
- Herhaal onderdeel b) voor $A^t x = b$.

Opgave 2:

Laat $T : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de transformatie zijn die de rechter kolom van een matrix A links neerzet. Bijvoorbeeld, als $n = 3$,

$$T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- Toon aan dat T een lineaire transformatie is. Wat is $\ker(T)$?
- Geef voor de ruimte $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ een (standaard) basis, en schrijf t.o.v. deze basis de matrixvoorstelling van T .
- Neem opnieuw n algemeen. Wat zijn de eigenwaarden van T ? Beschrijf voor elke eigenwaarde λ de eigenruimte E_λ . (Hint: maak onderscheid tussen n even en n oneven.)
- Laat nu T werken op $M_{n \times n}(\mathbb{C})$, d.w.z. complexe matrices. Geef opnieuw de eigenwaarden van T .

Opgave 3: Vind de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $6y'' + 13y' - 5y = 0$.

b) Laat $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ met het inproduct $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ zijn. Vind een orthogonale basis van de in a) gevonden ruimte van oplossingen.

c) Vind de algemene oplossing van $6y'' + 13y' - 5y = 16t^2 + 78t$.

Opgave 4:

Een populatie knaagkevers heeft de volgende eigenschappen: Er zijn grofweg evenveel mannelijke als vrouwelijke kevers. De eieren ontwikkelen zich in één maand tot volwassen kever. De kans dat hierbij het ei omkomt is 0.5. Volwassen kevers leggen iedere maand 10 eieren (en dan uiteraard alleen de vrouwtjes). De kans dat een volwassen kever een maand ouder wordt is $\alpha = 0.5$. Na die maand opnieuw 10 eieren enz.

- Stel een model op van de ontwikkeling van de keverpopulatie door middel van een overgangsmatrix A .
- Bereken de eigenwaarden van deze matrix.

Eén van deze eigenwaarden kan worden aangeduid met *groefactor* van de populatie.

c) Leg uit wat concreet met deze groefactor bedoeld wordt. Verklaar de rol van de eigenwaarden van A hierin. Is er in dit voorbeeld sprake van een keverplaag?

Om een keverplaag te voorkomen worden sluipwespen uitgezet, die eitjes in volwassen kevers leggen. Geïnfecteerde kevers zijn ter dode opgeschreven en reproduceren niet meer. Het aantal sluipwespen beïnvloedt derhalve de overlevingskans α van de kevers.

d) Bij welke α stabiliseert de keverpopulatie?